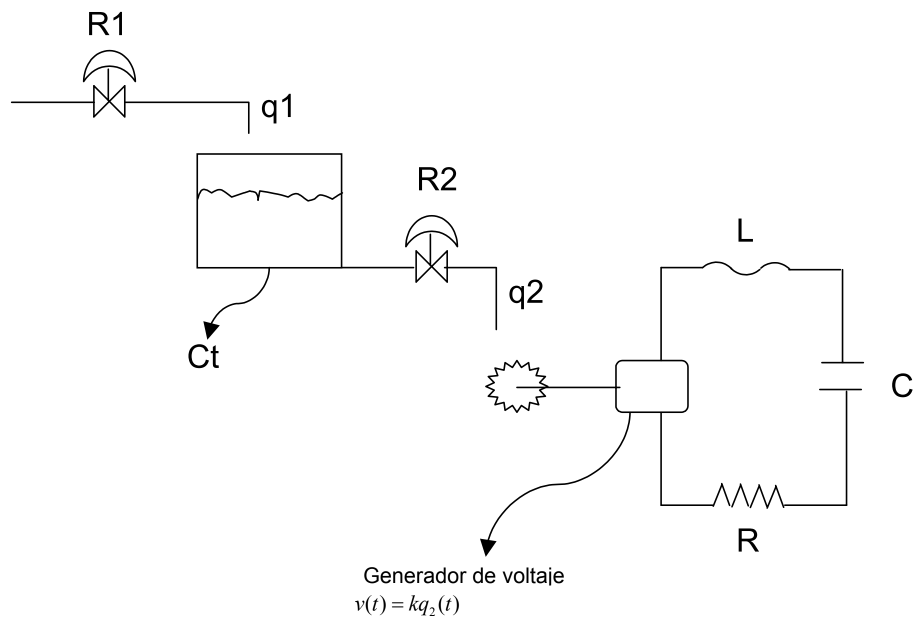
Salvador Macías Hernández 717320

Primer Examen Parcial

17/4/2003

PRIMER INCISO

Sea el sistema hidráulico/eléctrico siguiente:



Encuentre la función de transferencia que relacione a la salida (Voltaje del capacitor) con el flujo de entrada $q_1(t)$, cuando: Ct=3, R1=1, R2=2, K=5, L=0.2, C=0.25 y R=1

Este sistema lo podemos dividir en dos partes. La parte hidráulica y la parte eléctrica. La parte hidráulica la vimos en clase y sabemos que podemos obtener su modelo y en base a ese modelo lo podemos substituir por un circuito RC que tenga la misma expresión algebraica en su modelo. Teniendo en cuenta las limitaciones que el mismo modelo presenta.

Partiendo de lo anterior y con el apoyo de algunos libros, vamos a obtener el modelo del sistema hidráulico y vamos a encontrar un circuito eléctrico que tenga el mismo modelo.

Primer hay que dejar en claro que el agua que entra es la misma que sale y que se acumula en el tanque. Así, si medimos en un intervalo de tiempo el agua que sale, el agua que se queda almacenada en el tanque y el agua que entra. Notaremos que:

Agua que sale + Agua que se queda en el tanque = Agua que entra

Hay que recordar que esto es en un instante de tiempo, y que para medir esa cantidad de agua, es necesario, medir el caudal y el intervalo de tiempo, lo multiplicamos y listo.

$$q_2 \cdot dt + A \cdot dh = q_1 \cdot dt$$

Pero el agua que sale, está en función de la altura del tanque y de la resistencia de presenta la válvula:

$$q_2 = \frac{h}{R_2}$$

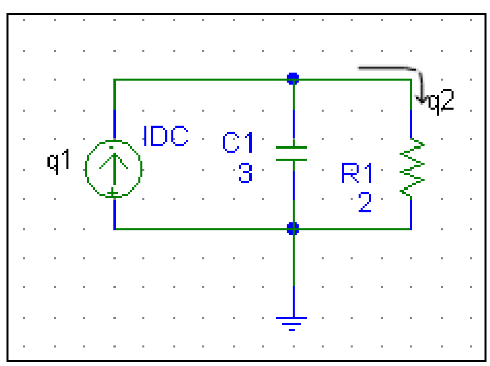
Entonces que la expresión queda de la siguiente manera:

$$A \cdot dh = q_1 \cdot dt - \frac{h}{R_2} \cdot dt$$

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = q_1 - \frac{h}{R_2}$$

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R_2} = q_1$$

Si tomamos en cuenta el simil que existe entre el flujo y la corriente eléctrica, entre el potencial (h) y el voltaje, entre la resistencia hidráulica de la válvula y una resistencia, entre un tinaco y un capacitor, podemos armar el siguiente circuito:



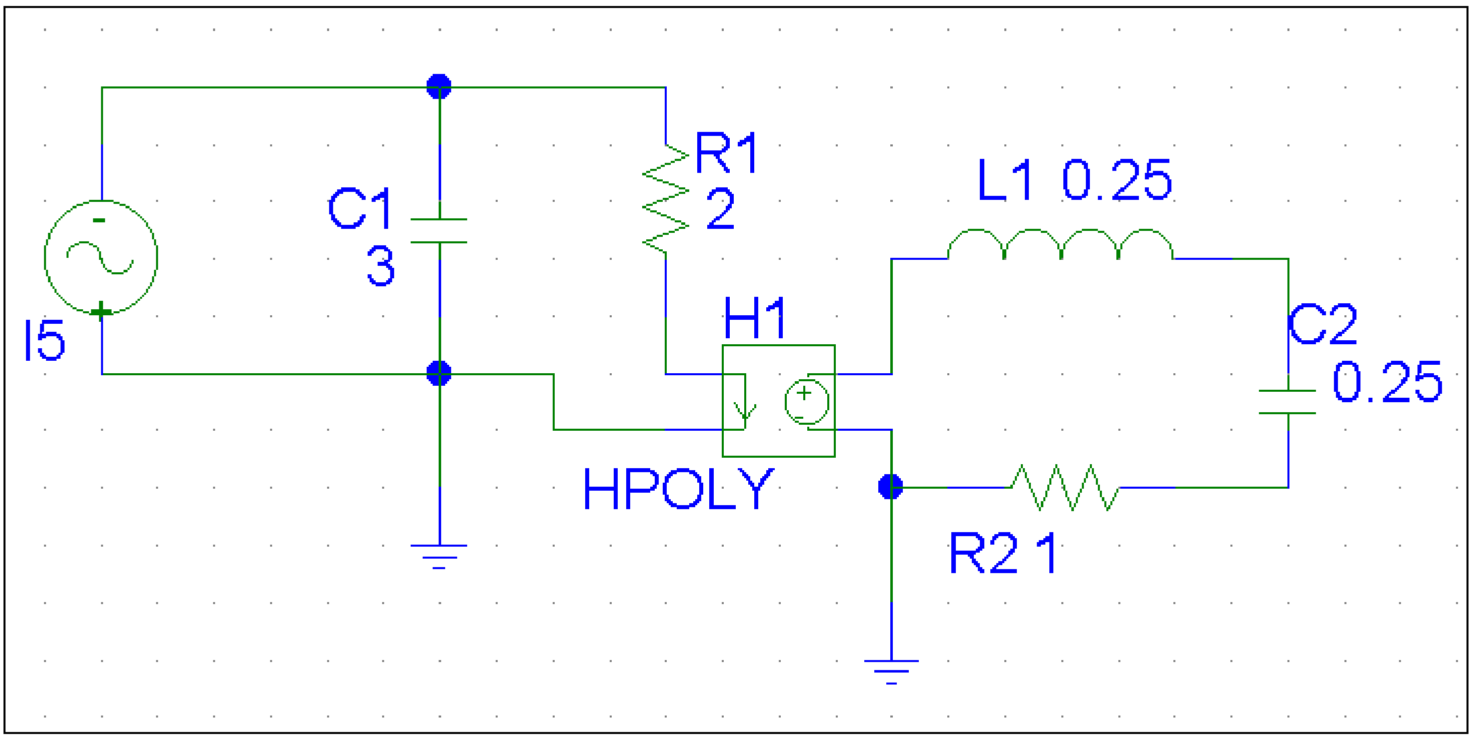
En donde la corriente del capacitor es una constante por la derivada del voltaje y la corriente del resistor es el voltaje entre la resistencia:

$$I_c = C\frac{d}{dt}V\ ;\ I_R = \frac{V}{R}$$

Entonces la corriente de entrada q1 es:

$$q_1 = C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$$

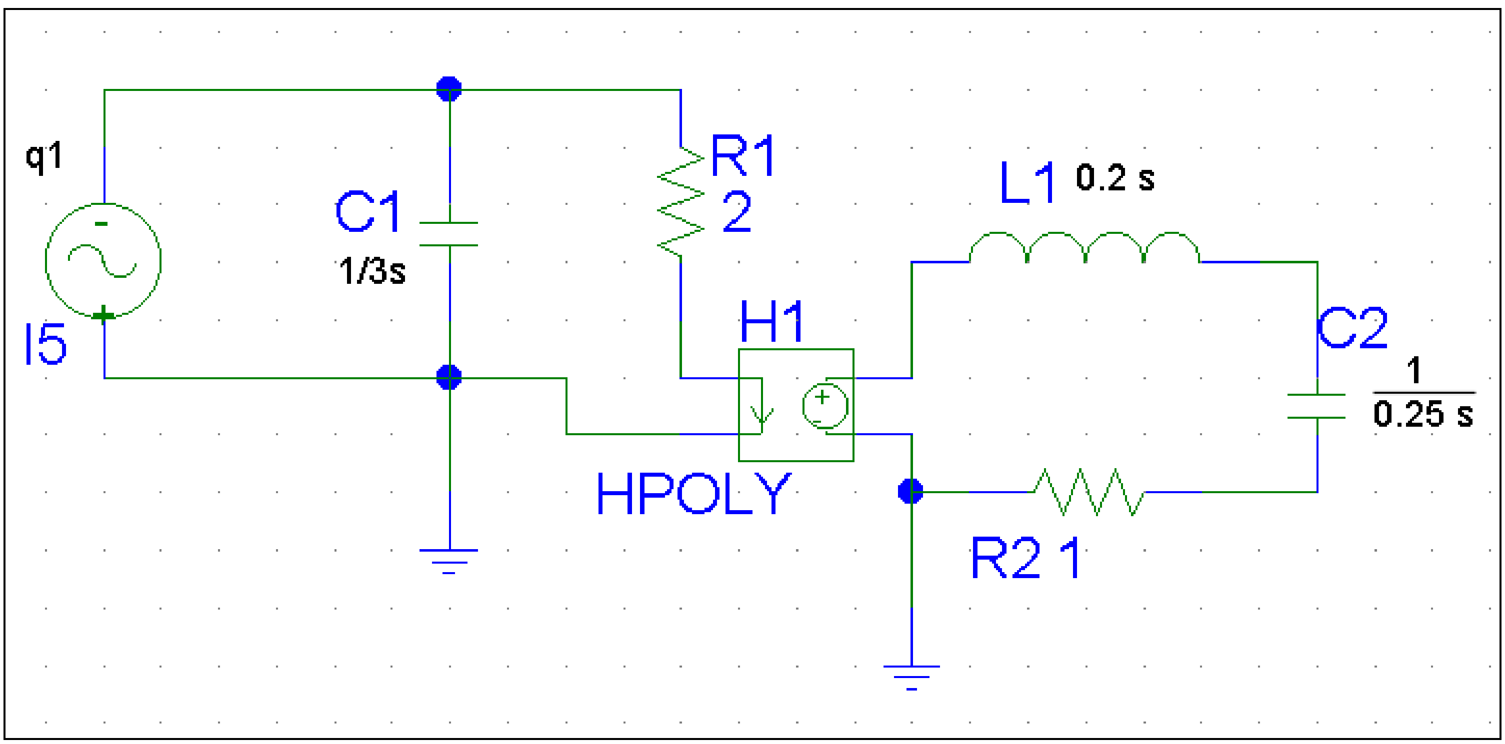
Y como observamos, esta ecuación y la del tanque tienen la misma forma, sólo que h es V, C es A, y R es R_2. Por tanto tienen el mismo modelo y para fines de análisis se les puede substituir. Y eso es lo que vamos a hacer. En vez de poner el sistema con el tanque, vamos a poner el sistema en su conjunto, con puros componentes electrónicos. Y así ya entramos netamente en mi área de conocimientos, y lo resolveremos con mayor facilidad.



El modelo anterior es el simil de nuestro sistema, si ven, hemos cambiado la parte hidráulica por el circuito RC y hemos puesto una fuente de ***corriente*** alterna, por que en el siguiente inciso nos piden la respuesta en el tiempo a esa señal de entrada. Hemos substituido el generador por una fuente de voltaje dependiente de la corriente q2 que pasa por la resistencia R1. La ganancia de esta fuente es de 5, es decir, si pasa un ampere por R1, la fuente dependiente generará 5 volts en la otra maya. Cabe señalar que estas dos mayas estás aisladas unas de otras. Aunque la fuente es dependiente de la corriente de la otra maya, no pasa ninguna corriente de una maya a la otra. Es como si tuvieran un optoacoplador.

Ya que este circuito es sencillo, podemos calcular rápidamente el valor en estado estacionario a una entrada de un ampere de DC. Como es DC se consideran todos los capacitores como circuito abierto y todos los inductores como corto circuito. Si es así en la maya de la izquierda circulará toda la corriente q1 por la resistencia R1 y esto hará que la fuente dependiente genere 5Vdc. Y como el circuito de la derecha es una maya simple, todos sus elementos están en serie, y ya que, el capacitor es un circuito abierto, consumirá todo el voltaje de la fuente. Por eso podemos asegurara que en un tiempo infinito el voltaje del capacitor será 5Vdc a una entrada de 1Ampere DC de la fuente Q1. Esto nos da la ***ganancia en estado estacionario*** que es de ***5***. Y con esto podemos verificar la función de transferencia que obtengamos y tener más certidumbre en lo que estamos haciendo.

Para encontrar, de forma más rápido la función de transferencia, pasamos todas las impedancias en términos de una frecuencia compleja "s". Como se muestra en la figura siguiente:



Así, salta a la vista que la corriente q2, que pasa por R1 es el divisor de corrientes:

$$q_2 = q_1\left(\frac{1/R1}{Ct \cdot s + 1/R1}\right) = q_1\left(\frac{1/2}{3s + 1/2}\right) = q_1\left(\tfrac{1}{6s+1}\right)$$

Y para sacar el voltaje del capacitor:

$$V_c = 5q_2\left(\frac{1/C_2 s}{Ls + 1/C_2 s + R2}\right) = 5q_2\left(\frac{4/s}{0.2s + 4/s + 1}\right)$$

$$\ldots = 5q_2\left(\frac{4}{0.2s^2 + s + 4}\right)$$

Pero q_2 ya lo habíamos obtenido...

$$V_c = 5q_1\left(\frac{1}{6s+1}\right)\left(\frac{4}{0.2s^2+s+4}\right) = \frac{100}{6s^3 + 31s^2 + 125s + 20}q_1$$

Entonces la función de transferencia, es:

$$G(s) = \frac{Vc}{q_1} = \frac{100}{6s^3 + 31s^2 + 125s + 20}$$

Dividimos el término independiente del numerador (100) entre el del denominador (20) y nos dio los mismos 5 de ganancia en estado estacionario que habíamos calculado antes. Por tanto se corroboró el resultado.

SEGUNDO INCISO

Encuentre la respuesta en el dominio del tiempo cuando, q1(t)=Cos[0.1t]

Lo primero que hay que observar es que q1 es el caudal con el que se llena el tanque, después hay que observar que nos dicen que el caudal q1 depende del tiempo y sigue un comportamiento trigonométrico por la función Cos[0.1t]. Esto quiere decir que probablemente tienen una bomba que regula el caudal, y así como le otorga agua al tanque (gasto positivo), así mismo la vuelve a tomar (gasto negativo). El tubo debe de llegar hasta abajo del tanque, de modo que pueda absorber el mayor fluido posible. Pero la función es cosenoidal, por tanto comienza en +1 (otorga agua al tanque), pasa por cero (no entra, no sale agua), luego va a -1 (absorbe toda el agua que otorgó al tanque, y eso suponiendo que puede recuperar el agua que salió por q2), y luego sigue absorbiendo pero con menor intensidad hasta llegar a cero. Pero como toda el agua que entregó al tanque ya la absorbió, y como partimos de condiciones iniciales cero (el tanque no tenía agua), entonces lo que va a absorber es puro aire y lo más probable es que esa bomba no aguante el ritmo y truene. Es por eso que intuimos que el objetivo de este inciso es puramente matemático.

La transformada de Laplace de la función de entrada es la siguiente:

$$Q1(s) = L\{Cos[0.1t]\} = \frac{s}{s^2+0.01}$$

Multiplicamos la señal Q1(s) por la función de transferencia G(s), para obtener la señal de salida en "s":

$$Vc(s) = G(s) \cdot Q_1(s)$$

$$= \frac{s}{s^2+0.01} \cdot \frac{100}{6s^3+31s^2+125s+20} = \frac{100s}{(s^2+0.01)(6s^3+31s^2+125s+20)}$$

$$= \frac{100s}{6s^5+31s^4+125.06s^3+20.31s^2+1.25s+0.2}$$

Separando en fracciones parciales, con la ayuda de Mathematica...

$$Vc(s) = \frac{-22.9846}{6(\frac{1}{6}+s)} + \frac{0.1813+0.209923s}{20+5s+s^2} + \frac{0.2297+3.6208s}{0.01+s^2}$$

De tablas podemos sacar rápidamente que el primer término es:

$$L^{-1}\left\{\frac{-22.9846}{6(s+\frac{1}{6})}\right\} = \frac{-22.9846}{6} e^{-\frac{1}{6}t}$$

y que el último término es:

$$L^{-1}\left\{\frac{0.2297+3.6208s}{s^2+(0.1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{0.2297}{0.1} \cdot \frac{0.1}{s^2+(0.1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3.6208}{1} \cdot \frac{s}{s^2+(0.1)^2}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2.297 Sin[0.1t] + 3.6208 Cos[0.1t]$$

y el término de enmedio.....

$$L^{-1}\left\{\frac{0.1813+0.2099s}{20+5s+s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{0.201} \frac{s+0.9019}{(s-(-\frac{5}{2}))^2+\frac{55}{4}}\right\}$$

$$\ldots\ldots = \frac{1}{0.201} L^{-1}\left\{\frac{s-(-\frac{5}{2})}{(s-(-\frac{5}{2}))^2+\frac{55}{4}} + \frac{(0.9019+\frac{5}{2})}{\sqrt{\frac{55}{4}}} \frac{\sqrt{\frac{55}{4}}}{(s-(-\frac{5}{2}))^2+\frac{55}{4}}\right\}$$

$$\ldots\ldots = \frac{1}{0.201}\left(e^{-\frac{5}{2}t} Cos[\sqrt{\tfrac{55}{4}}t] + 0.9174 e^{-\frac{5}{2}t} Sin[\sqrt{\tfrac{55}{4}}t]\right)$$

Con lo que ya tenemos la respuesta en el dominio del tiempo. El último término dio la respuesta forzada y los dos primeros términos dieron los transitorios.

REFERENCIAS:

Laplace Transforms; Murray R. Spiegel, 1a Edición

Análisis de circuitos en ingeniería; William Hayt, Jack Kemmerly. 5a Edición

Sistemas de control en ingeniería; Paul Lewis,, Chang Yang

Elementos de control automático de procesos; Ruy Renau Ballester