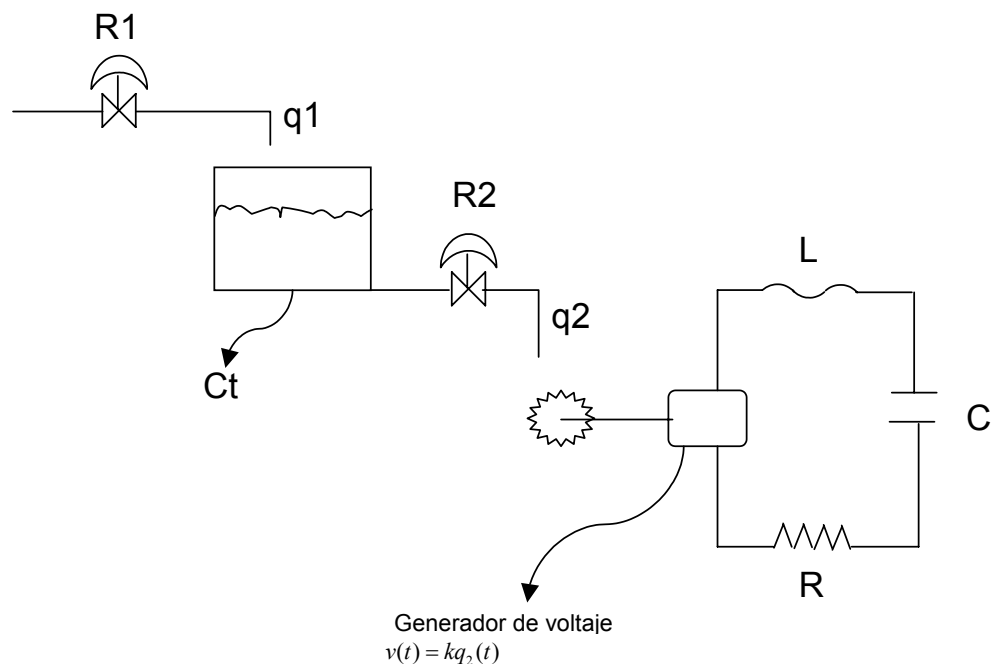




Tercer Examen Parcial

domingo, 13 de noviembre de 2005

PRIMER INCISO Sea el sistema hidráulico/eléctrico siguiente:



Encuentre la función de transferencia que relacione a la salida (Voltaje del capacitor) con el flujo de entrada $q_1(t)$, cuando: $C_t=3$, $R_1=1$, $R_2=2$, $K=5$, $L=0.2$, $C=0.25$ y $R=1$

Este sistema lo podemos dividir en dos partes. La parte hidráulica y la parte eléctrica. La parte hidráulica la vimos en clase y sabemos que podemos obtener su modelo y en base a ese modelo lo podemos substituir por un circuito RC que tenga la misma expresión algebraica en su modelo. Teniendo en cuenta las limitaciones que el mismo modelo presenta.

Partiendo de lo anterior y con el apoyo de algunos libros, vamos a obtener el modelo del sistema hidráulico y vamos a encontrar un circuito eléctrico que tenga el mismo modelo.

Primer hay que dejar en claro que el agua que entra es la misma que sale y que se acumula en el tanque. Así, si medimos en un intervalo de tiempo el agua que sale, el agua que se queda almacenada en el tanque y el agua que entra. Notaremos que:

$$\text{Agua que sale} + \text{Agua que se queda en el tanque} = \text{Agua que entra}$$

Hay que recordar que esto es en un instante de tiempo, y que para medir esa cantidad de agua, es necesario, medir el caudal y el intervalo de tiempo, lo multiplicamos y listo.

$$q_2 \cdot dt + A \cdot dh = q_1 \cdot dt$$

Pero el agua que sale, está en función de la altura del tanque y de la resistencia de presenta la válvula:

$$q_2 = \frac{h}{R_2}$$

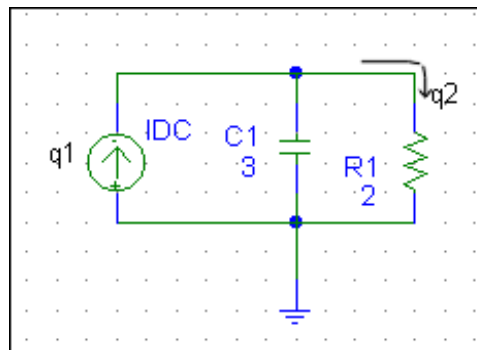
Entonces que la expresión queda de la siguiente manera:

$$A \cdot dh = q_1 \cdot dt - \frac{h}{R_2} \cdot dt$$

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = q_1 - \frac{h}{R_2}$$

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R_2} = q_1$$

Si tomamos en cuenta el similitud que existe entre el flujo y la corriente eléctrica, entre el potencial (h) y el voltaje, entre la resistencia hidráulica de la válvula y una resistencia, entre un tinaco y un capacitor, podemos armar el siguiente circuito:



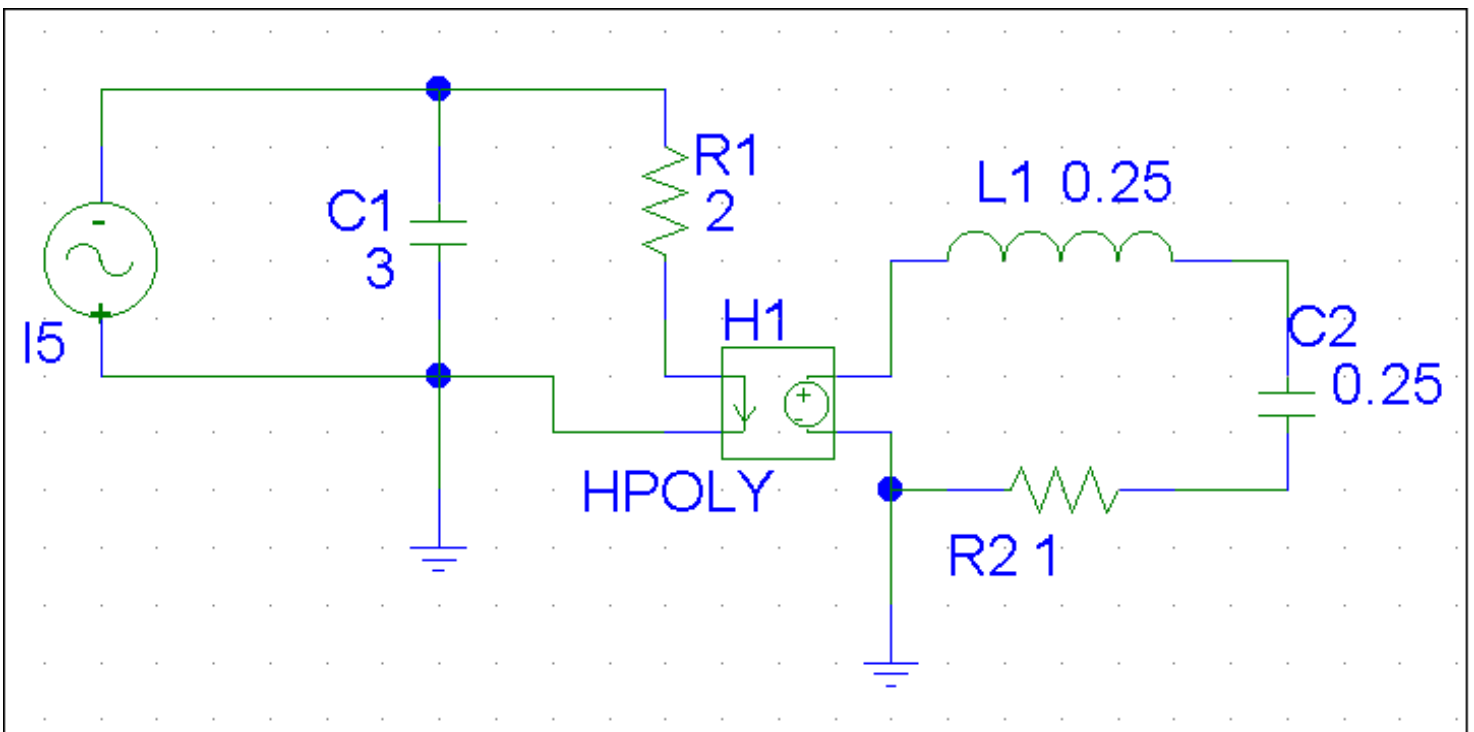
En donde la corriente del capacitor es una constante por la derivada del voltaje y la corriente del resistor es el voltaje entre la resistencia:

$$I_c = C \frac{dV}{dt}; I_R = \frac{V}{R}$$

Entonces la corriente de entrada q_1 es:

$$q_1 = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$$

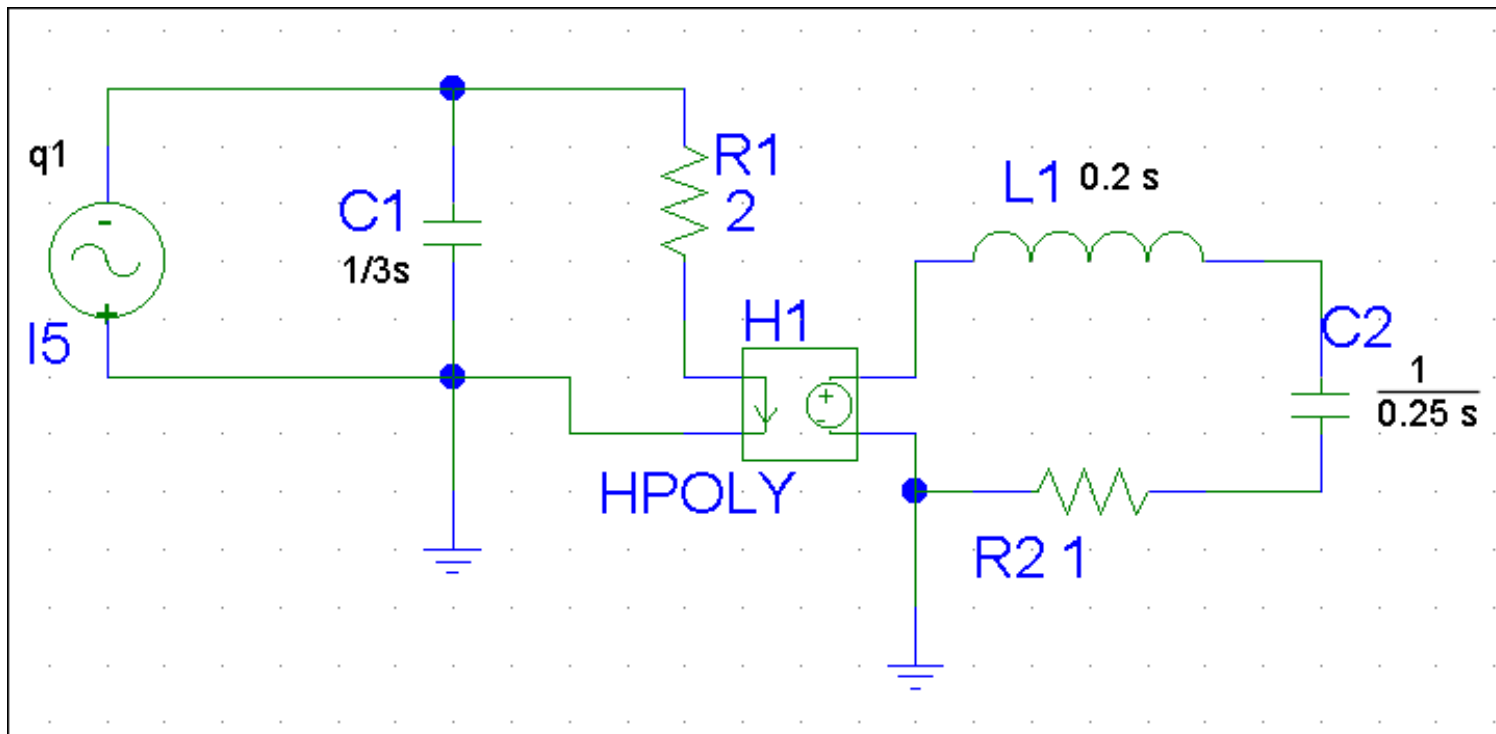
Y como observamos, esta ecuación y la del tanque tienen la misma forma, sólo que h es V , C es A , y R es R_2 . Por tanto tienen el mismo modelo y para fines de análisis se les puede substituir. Y eso es lo que vamos a hacer. En vez de poner el sistema con el tanque, vamos a poner el sistema en su conjunto, con puros componentes electrónicos. Y así ya entramos netamente en mi área de conocimientos, y lo resolveremos con mayor facilidad.



El modelo anterior es el simil de nuestro sistema, si ven, hemos cambiado la parte hidráulica por el circuito RC y hemos puesto una fuente de **corriente** alterna, por que en el siguiente inciso nos piden la respuesta en el tiempo a esa señal de entrada. Hemos substituido el generador por una fuente de voltaje dependiente de la corriente q_2 que pasa por la resistencia R_1 . La ganancia de esta fuente es de 5, es decir, si pasa un ampere por R_1 , la fuente dependiente generará 5 volts en la otra maya. Cabe señalar que estas dos mayas estás aisladas unas de otras. Aunque la fuente es dependiente de la corriente de la otra maya, no pasa ninguna corriente de una maya a la otra. Es como si tuvieran un optoacoplador.

Ya que este circuito es sencillo, podemos calcular rápidamente el valor en estado estacionario a una entrada de un ampere de DC. Como es DC se consideran todos los capacitores como circuito abierto y todos los inductores como corto circuito. Si es así en la maya de la izquierda circulará toda la corriente q_1 por la resistencia R_1 y esto hará que la fuente dependiente genere 5Vdc. Y como el circuito de la derecha es una maya simple, todos sus elementos están en serie, y ya que, el capacitor es un circuito abierto, consumirá todo el voltaje de la fuente. Por eso podemos asegurara que en un tiempo infinito el voltaje del capacitor será 5Vdc a una entrada de 1Ampere DC de la fuente Q_1 . Esto nos da la **ganancia en estado estacionario** que es de 5. Y con esto podemos verificar la función de transferencia que obtengamos y tener más certidumbre en lo que estamos haciendo.

Para encontrar, de forma más rápido la función de transferencia, pasamos todas las impedancias en términos de una frecuencia compleja “s”. Como se muestra en la figura siguiente:



Así, salta a la vista que la corriente q_2 , que pasa por R_1 es el divisor de corrientes:

$$q_2 = q_1 \left(\frac{\frac{1}{R_1}}{Ct \cdot s + \frac{1}{R_1}} \right) = q_1 \left(\frac{\frac{1}{2}}{3s + \frac{1}{2}} \right) = q_1 \left(\frac{1}{6s+1} \right)$$

Y para sacar el voltaje del capacitor:

$$V_c = 5q_2 \left(\frac{\frac{1}{C_2}s}{Ls + \frac{1}{C_2}s + R_2} \right) = 5q_2 \left(\frac{\frac{4}{s}}{0.2s + \frac{4}{s} + 1} \right)$$

$$\dots = 5q_2 \left(\frac{4}{0.2s^2 + s + 4} \right)$$

Pero q_2 ya lo habíamos obtenido...

$$V_c = 5q_1 \left(\frac{1}{6s+1} \right) \left(\frac{4}{0.2s^2 + s + 4} \right) = \frac{100}{6s^3 + 31s^2 + 125s + 20} q_1$$

Entonces la función de transferencia, es:

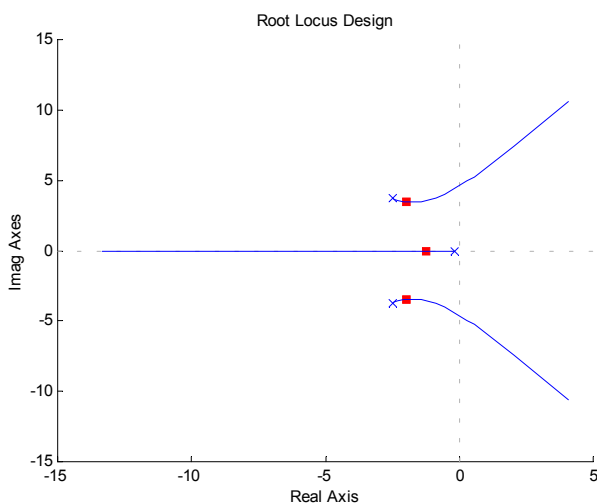
$$G(s) = \frac{V_c}{q_1} = \frac{100}{6s^3 + 31s^2 + 125s + 20}$$

Dividimos el término independiente del numerador (100) entre el del denominador (20) y nos dio los mismos 5 de ganancia en estado estacionario que habíamos calculado antes. Por tanto se corroboró el resultado.

Diseñen un controlador utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist y compensadores (adelanto / atraso) tal que: El error tienda a cero ($e \rightarrow 0$) a una referencia tipo escalón, con un ancho de banda $\omega_b = 0.1$ rad/seg, Margen de fase de 90° y Margen de Ganancia de 24dB's

SEGUNDO INCISO

Antes que nada y aprovechando que ya tenemos nuestra planta, vamos a sacar el lugar de las raíces. Sabemos que nuestra planta tiene tres polos en situados en:



POLO	LOCALIZACIÓN
Real	-0.167
Complejo	(-2.5,3.71)
Complejo conjugado	(-2.5,-3.71)

De allí que MathLab nos arroje el lugar de las raíces de la izquierda, para una $k=1$. Como podemos observar, la planta, en sí, es estable en lazo cerrado.

Lugar de las raíces de la pura planta, polos en rojo para cuando $K=1$.

La planta es estable

A continuación mostramos el diagrama de Bode y de Nyquist, para obtener más información de nuestra planta.

Bode Diagrams

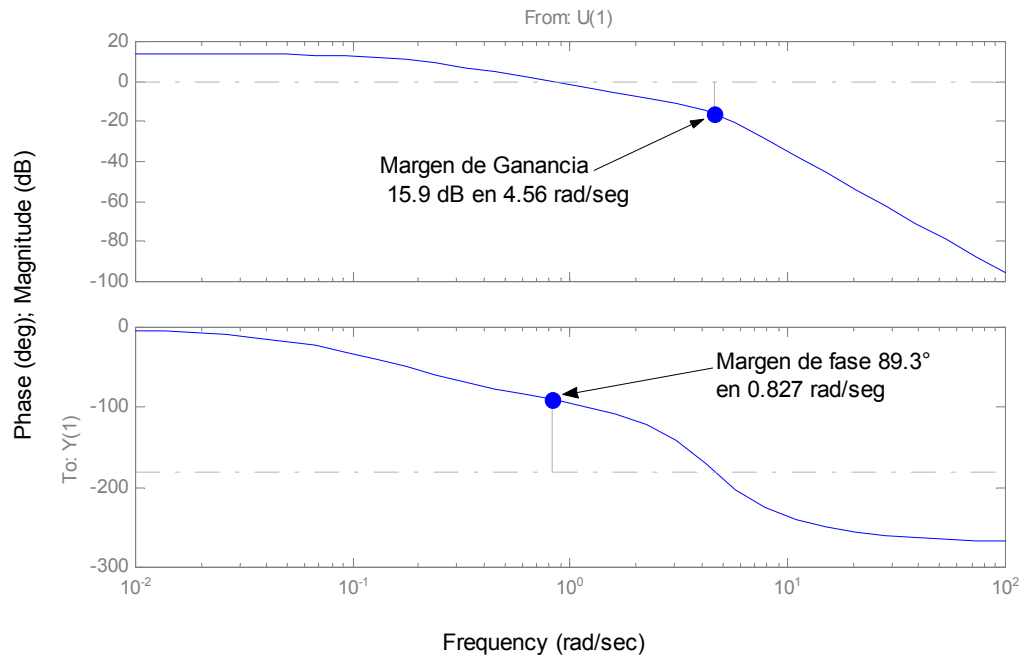


Diagrama de Bode de la pura planta, observamos que tiene un Margen de ganancia de 15.9dB y un Margen de fase de 89.3°

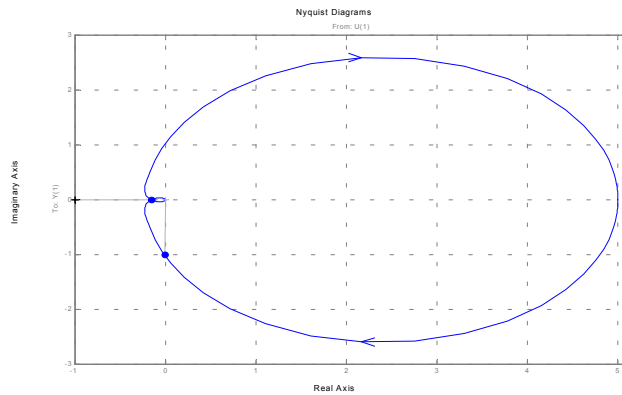
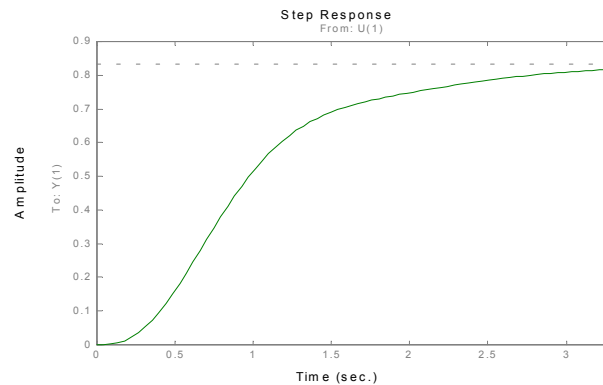
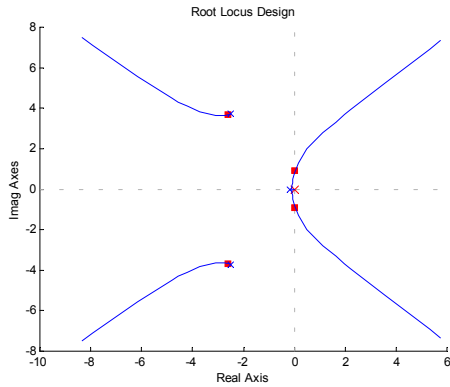


Diagrama de Nyquist de la pura planta. Se observa que la planta es estable para ese valor de K



Respuesta a un escalón de la pura planta en lazo cerrado, con una $k=1$. Observamos que la dinámica termina en un poco más de tres segundos y no alcanza nunca a llegar a su referencia (1)



LGR de la planta más el integrador. Se observa que al agregar el integrador, el sistema se volvió inestable para el mismo valor de k

Ya obtuvimos bastante información de nuestra planta. Ahora vamos a agregar un integrador en el controlador para hacer que nuestra planta tenga un error en estado estacionario nulo.

Como podemos observar en el lugar de las raíces de la izquierda, cuando agregamos el integrador la planta tiende a la inestabilidad, por lo que no podemos obtener los márgenes de fase ni de estabilidad para hacer el diseño de nuestro compensador. Por tanto vamos a bajar la k , para que el sistema se haga estable.

El valor de k que mejor desempeño da es el de 0.1, por tanto partiremos de allí para saber que tanto margen de fase tenemos que añadir con el compensador. Para ello obtuvimos el diagrama de Bode y Nyquist.

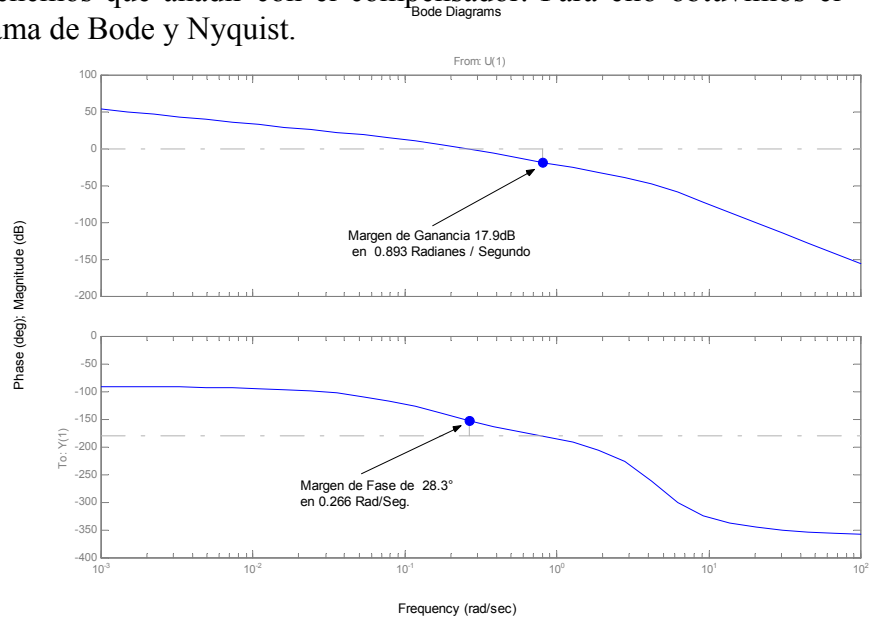


Diagrama de Bode de la planta y el integrador para una $k=0.1$, el sistema es estable y se tiene un margen de ganancia de 17.9dB.

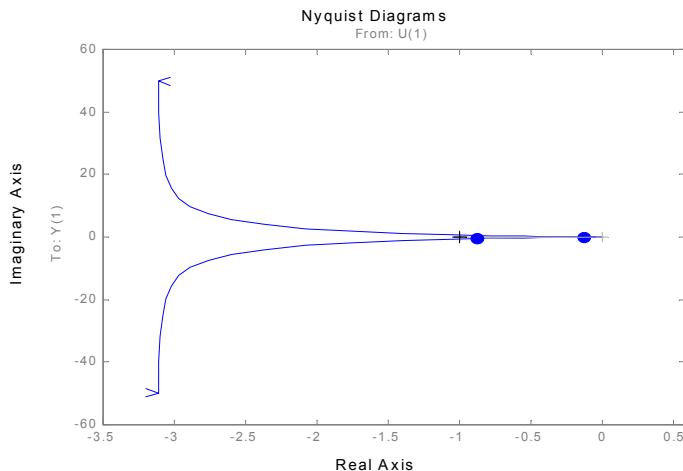


Diagrama de Nyquist de la planta y el integrador cuando $k=0.1$. El sistema es estable ya que no rodea al punto $(-1,0)$

Para que tengamos un margen de fase mayor a 90° podemos usar un compensador de adelanto, ya que requerimos levantar 66.7° y los compensadores de adelanto generan aumentos en fase menores a 90° . Por tanto:

$$\varphi_m = 66.7^\circ$$

$$a = \frac{1 + \text{Sen}(\varphi_m)}{1 - \text{Sen}(\varphi_m)} = 23.5237$$

$$|G(\omega_m)| = 10 \log(a) = 10 \log|23.5237| = 13.7151$$

Del diagrama de Bode se obtiene que:

$$\omega_m = 0.6 \text{ rad/seg}$$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = 0.343634$$

Y entonces el compensador de adelanto toma la forma:

$$C_{ad} = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} = \frac{aT(s + 1/aT)}{T(s + 1/T)} = \frac{a(s + 0.123)}{(s + 2.91)}$$

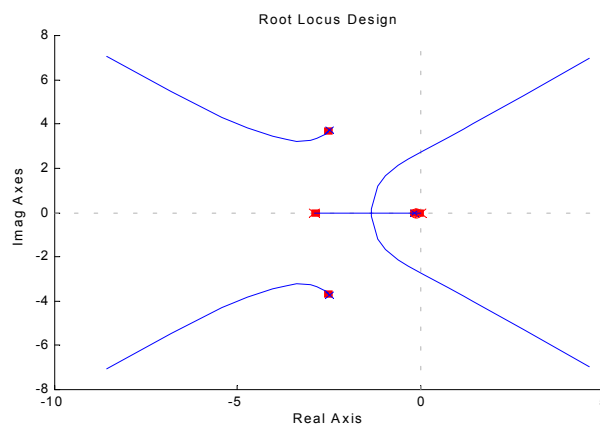
Y hay que recordar que la ganancia que encontremos en Rltool, es el producto de **a** por la ganancia del sistema. O expresado en forma matemática:

$$K_{Rltool} = a \cdot K_{real}$$

$$K_{real} = \frac{K_{Rltool}}{a}$$

Pero ya que definimos lo anterior, consideraremos de aquí en adelante, a menos que se especifique lo contrario, a la ganancia **K** como la que da Rltool.

Ya que diseñamos nuestro compensador, ahora vamos a probarlo, añadiéndole un polo en **-2.91** y un cero en **-0.123**. Una vez probado, observamos que el sistema sigue estable, y el margen de ganancia quedó en 91.8° a 0.0213 rad/seg, con un margen de ganancia de 41.7dB en 2.74 rad/seg. Y un ancho de banda de 0.03 rad/seg. Todo esto para una ganancia $K=0.1$



LGR de la planta más el compensador de adelanto y el integrador.
El sistema es estable.

Bode Diagrams

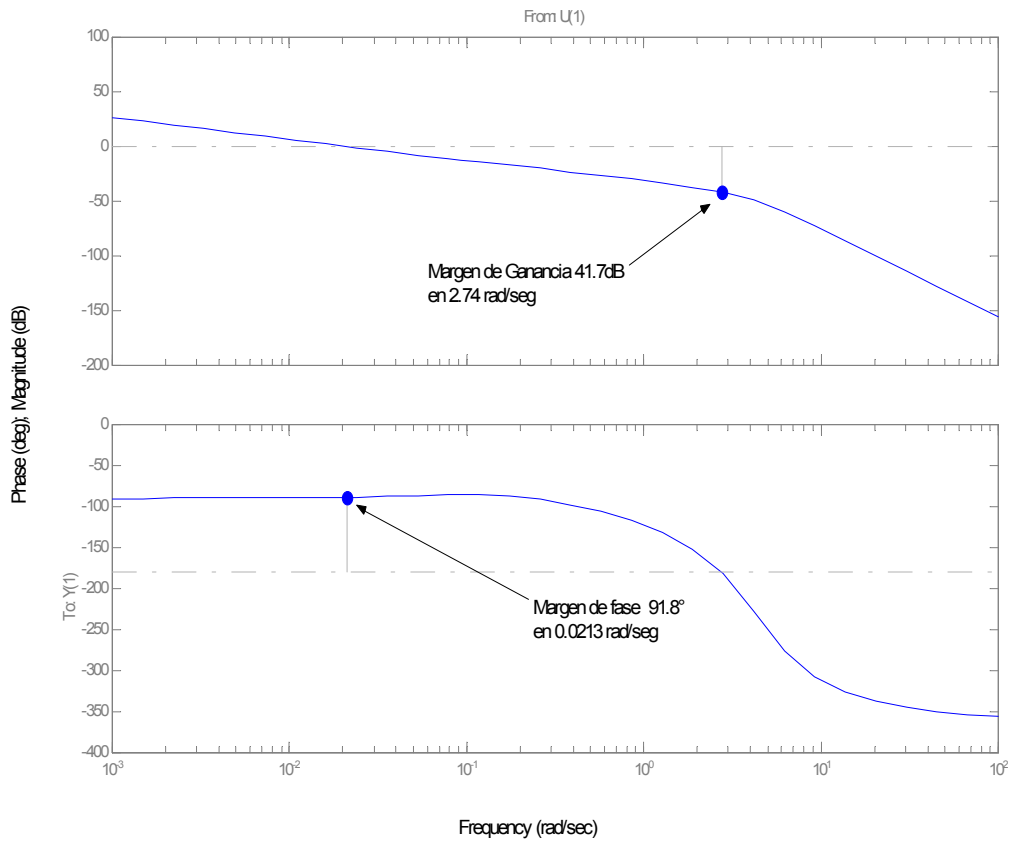
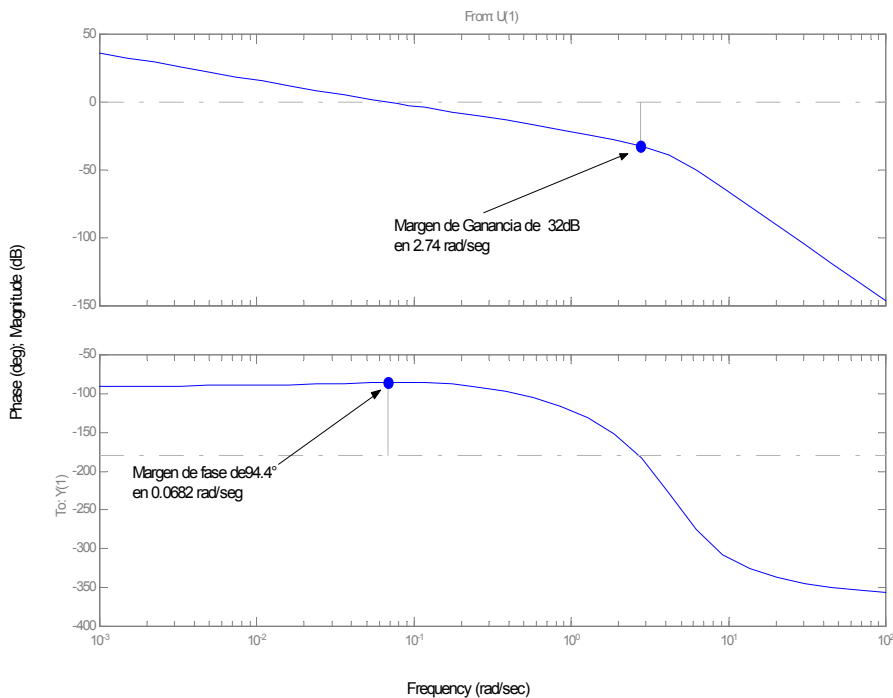


Diagrama de Bode, después de poner el compensador de adelanto y el integrador. Con una ganancia $k=0.1$. Se puede ver que el ancho de banda que nos dieron fue de 0.1 rad/seg y lo tuvimos 91.8°

Bode Diagrams



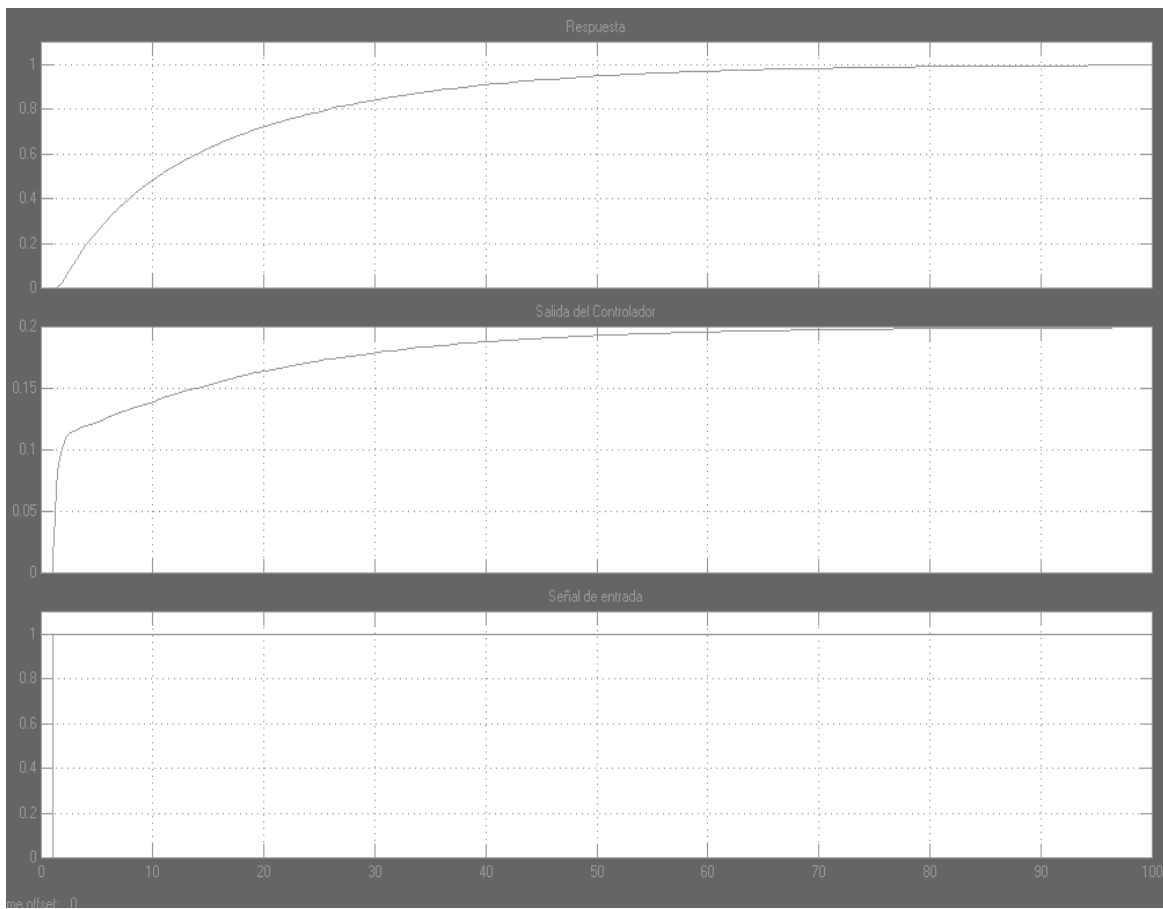
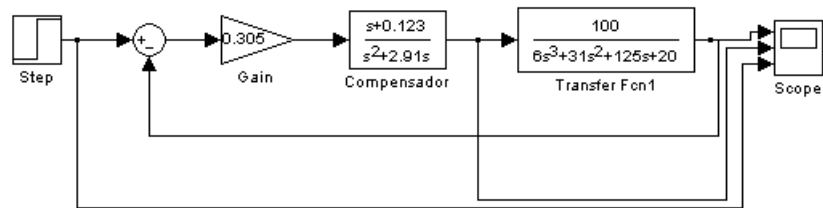
Tenemos un buen desempeño en margen de fase y en margen de ganancia, pero en lo que se nos fue muy abajo, fue el ancho de banda. Ya que nos lo pidieron de 0.1 rad/seg y lo tenemos en 0.03 rad/seg . Para ello variamos la ganancia, hasta dejar el ancho de banda en 0.1 rad/seg . Encontramos que en **0.305** el ancho de banda está en 0.997 rad/seg . El margen de ganancia disminuyó a **32dB**, y el margen de fase subió a **94.4°**

Diagrama de Bode del compensador de adelanto, el integrador y la planta con una ganancia de $K=0.305$. El margen de ganancia fue de 32 dB y el de fase de 94.4°

Ya que obtuvimos un controlador con mejores características de las que nos pidieron, ya que tiene un poco más de margen de fase y ganancia. Cumple con error estacionario nulo, damos por terminado el diseño del compensador. Ya que no creo que sea conveniente dedicarle tiempo a empeorar el controlador obtenido.

Ahora vamos a simular el proceso con simulink. El modelo es el siguiente:

Y la respuesta fue la siguiente:



Gráfica de la entrada, salida del compensador y respuesta de la planta. Se puede observar que el tiempo de establecimiento es cercano a los 60 segundos. Y alcanza su valor de referencia.

CONCLUSIONES Ya que nuestro compensador cumplió con las características solicitadas, y en algunas, no solo las cumplió, sino que las superó. Consideramos que fue un buen diseño. Otra cosa que debemos recalcar, fue que en este diseño, los requerimientos fueron reales, es decir que no se pidieron cosas que la dinámica propia del sistema no pudiera permitir. En este caso la señal de entrada, de salida y del controlador, estuvieron en un rango totalmente admisible.

Notamos que es más fácil realizar el diseño de un compensador, vía las herramientas de análisis en frecuencia, que solamente por LGR. Al principio, quise utilizar el diagrama de Bode y el de Nyquist. Y de hecho los use, pero entre más usaba Bode, Nyquist y LGR; más usaba Bode y LGR. Yo creo que me acoplé más a usar Bode y LGR. Por que, para mí se me hizo más útil. Ya que con LGR, sé cuando es inestable, por qué se me hace inestable, y sobretodo como se van a comportar las ramas si le añado un polo o un cero. Y en Nyquist no, por que Nyquist lo da de una forma más general. Considerando todos los polos y los ceros. En LGR, como que es más específico de cada uno de los polos o ceros.

REFERENCIAS REFERENCIAS:

- T Laplace Transforms; Murray R. Spiegel, 1a Edición
- T Análisis de circuitos en ingeniería; William Hayt, Jack Kemmerly. 5a Edición
- T Sistemas de control en ingeniería; Paul Lewis,, Chang Yang
- T Elementos de control automático de procesos; Ruy Renau Ballester
- T Sistemas de control automático; Benjamin C. Kuo