Salvador Macías Hernández
Rodolfo Gómez Vega

MÉTODO DE RUNGE - KUTTA

10/11/2003 Tarea No.11

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Los métodos de Runge Kutta corresponden a una generalización de la expresión:

$$y_{i+1} = y_i + \phi\left(x_i, y_i, h\right) h$$

Donde $\phi\left(x_i, y_i, h\right)$ es conocida como la función incremento ,

y corresponde a:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h\right)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f\left(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h\right)$$

Esta expresión corresponde al orden n, pero en caso de tratarse de orden 1, se tiene el caso de EULER, en caso de tratarse de n = 2 se tiene segundo orden, y así sucesivamente.

MÉTODO RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Replanteando la expresión del método se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right) h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h\right)$$

Los valores de a_1, a_2, p_1 y q_{11} se obtienen mediante transformaciones algebráicas de las expresiones anteriores:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_1 p_2 = 1/2$$
$$a_2 q_{11} = 1/2$$

Se tarta de un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas, luego:

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$p_1 = q_{11} = 1/2a_2$$

VARIACIONES DEL MÉTODO DE RUNGE - KUTTA

Método de HEUN.

Método de un solo corredor

$$\left(a_2 = 1/2\right)$$

Suponiendo que a =.5 , es posible replantear todo el método de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + h, y_i + k_1 h\right)$$

Método del punto medio

$$\left(a_2 = 1\right)$$

Suponiendo que a2=0 a1=0 P1=q11=.5, entonces, luego es posible replantear todo el método de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Integrar numéricamente la expresión:

$$f\left(x, y\right) = -2x^3 - 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde x =0 hasta x =4 usando un amaño de paso de 0,5. La condición inicial en x =0 es y =0

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) = -2\left(0\right)^3 + 12\left(0\right)^2 - 20\left(0\right) + 8,5 = 8,5$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) = -2\left(0,25\right)^3 + 12\left(0,25\right)^2 - 20\left(0,25\right) + 8,5 = 4,21875$$

$$y\left(0,5\right) = y_0 + k_2 h = 1 + 4,21875\left(0,5\right) = 3,109375$$

Estos cálculos se repiten en forma repetitiva y sus resultados aparecen registrados en la tabla resumen más adelante.

Método Ralston

$$\left(a_2 = \tfrac{2}{3}\right)$$

Suponiendo que a = .66666 se obtiene u error mínimo de truncamiento, entonces se tiene que a1=.33333 p1=q1=.75 , luego es posible replantear todo el método de la siguiente manera:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Realizar el mismo cálculo que el realizado para el método de Punto medio, pero utilizando el étodo de Ralston.

$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) = -2\left(0\right)^3 + 12\left(0\right)^2 - 20\left(0\right) + 8,5 = 8,5$, igual que en el método del Punto medio.

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) = -2\left(0,375\right)^3 + 12\left(0,375\right)^2 - 20\left(0,375\right) + 8,5 = 2,58203125$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h = 1 + \left[\left(\frac{1}{3}\right)8,5 + \left(\frac{2}{3}\right)2,58203125\right]\left(0,5\right)$$

$$y\left(0,5\right) = 3,27734375$$

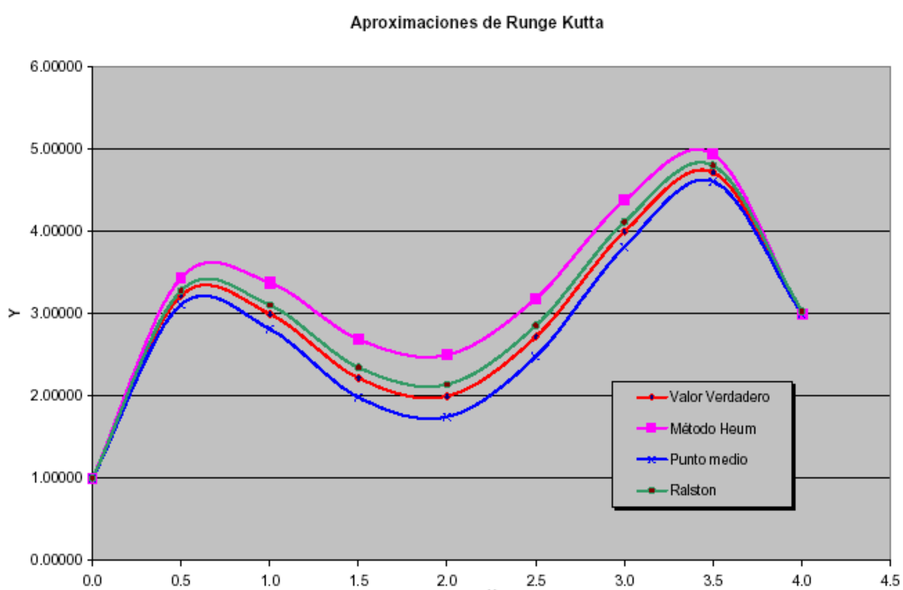
Estos cálculos se repiten en forma repetitiva y sus resultados aparecen registrados en la tabla resumen más adelante.

TABLA COMPARATIVA

A continuación se presenta una comparación entre los valores verdadero y aproximado para la solución de la ecuación utilizando los tres métodos expuestos:

$$y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

x	Valor Verdadero	Método Heum		Punto medio		Ralston	
		y	Error	y	Error	y	Error
0.0	1.00000	1.00000	0.0	1.00000	0.0	1.00000	0.0
0.5	3.21875	3.43750	6.8	3.10938	3.4	3.27734	4.7
1.0	3.00000	3.37500	12.5	2.81250	6.3	3.10156	8.1
1.5	2.21875	2.68750	21.1	1.98438	10.6	2.34766	12.6
2.0	2.00000	2.50000	25.0	1.75000	12.5	2.14063	14.4
2.5	2.71875	3.18750	17.2	2.48438	8.6	2.85547	10.4
3.0	4.00000	4.37500	9.4	3.81250	4.7	4.11719	5.9
3.5	4.71875	4.93750	4.6	4.60938	2.3	4.80078	2.8
4.0	3.00000	3.00000	0.0	3.00000	0.0	3.03125	1.0



MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE TERCER ORDEN

Para $n = 3$, el desarrollo es similar al caso de segundo orden, para obtener:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right)$$

MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Para $n = 4$, conocido como método RK clásico de cuarto orden, el desarrollo es similar al caso de segundo orden, para obtener:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$

Donde:

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

Por el método de cuarto orden obtener los valores aproximados para la solución de :

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}$$

En x=.1 ,.2 utilizando h = 0.1 , y conociendo que y(0)=1
Replanteando la expresión dada, se tiene:

$$y' = x^3 e^{-2x} - 2y$$

$$k_{10} = f(x_0, y_0) = f(0,1) = -2$$

$$k_{20} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{10}h}{2}\right) = f\left((0.05), 1 + (0.05)(-2)\right) = f(0.05, 0.9) =$$

$$k_{20} = -2(0.9) + (0.05)^3 e^{-0.1} = -1.799886895$$

$$k_{30} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{20}h}{2}\right) = f\left((0.05), 1 + (0.05)(-1.799886895)\right) = f(0.05, 0.910005655) =$$

$$k_{30} = -2(0.910005655) + (0.05)^3 e^{-0.1} = -1.819898206$$

$$k_{40} = f(x_0 + h, y_0 + k_{30}h) = f\left((0.1), 1 + (0.1)(-1.819898206)\right) = f(0.1, 0.818010179) =$$

$$k_{40} = -2(0.818010179) + (0.1)^3 e^{-0.2} = -1.635201628$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40})h$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6}\left(-2 + 2(-1.799886895) + 2(-1.819898206) + (-1.635201628)\right) = 0.818753803$$

$$k_{11} = f(x_1, y_1) = f(0.1, 0.818753803) =$$

$$k_{11} = -2(0.818753803) + (0.1)^3 e^{-0.2} = -1.636688875$$

$$k_{21} = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{11}h}{2}\right) = f\left((0.15), 0.818753803 + (0.05)(-1.636688875)\right) =$$

$$k_{21} = f(0.15, 0.736919359) = -2(0.736919359) + (0.15)^3 e^{-0.3} = -1.471338457$$

$$k_{31} = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_{21}h}{2}\right) = f\left((0.15), 0.818753803 + (0.05)(-1.471338457)\right) =$$

$$k_{31} = f(0.15, 0.745186880) = -2(0.745186880) + (0.15)^3 e^{-0.3} = -1.487873498$$

$$k_{41} = f(x_1 + h, y_1 + k_{31}h) = f\left((0.2), 0.818753803 + (0.1)(-1.487873498)\right) =$$

$$k_{41} = f(0.2, 0.669966453) = -2(0.669966453) + (0.2)^3 e^{-0.4} = -1.334570346$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}\right)h$$

$$y_2 = 0.818753803 + \frac{0.1}{6}\left(-1.636688875 + 2\left(-1.471338457\right) + 2\left(-1.487873498\right) - 1.334570346\right) =$$

$$y_2 = 0.670592417$$

PROGRAMA

```
(x,y,h)
Prgm
Define Yn(x,y)=x+1-y

Yn(x,y)–>K1
Yn(x+H/2,y+H*K1/2)–>K2
Yn(x+.5*H,y+H*K2/2)–>K3
Yn(x+H,y+H*K3)–>K4
 y+H*(K1+2k2+2k3+k4)/6–>y
 x+H–>x
 {x,y,h,k1,k2,k3,k4}–>Rung1
EndPrgm
```