Salvador Macías Hernández
Rodolfo Gómez Vega

SERIES DE TAYLOR

6/10/2003 Tarea No. 7

INTRODUCCIÓN. Las series clásicas de Taylor fueron publicadas por vez primera por un discípulo de Newton llamado Brook Taylor (1685-1731) en su *Methodus incrementorum* de 1715. Taylor obtuvo la serie suya después de un argumento basado en la interpretación de la fórmula de interpolación de Gregory- Newton. Si X=Xo+n dx la fórmula de interpolación dá: y=f(Xo+n dx)

$$y = y_0 + n\,\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

Taylor considera hacer que el límite de dx –> 0; n–>oo mientras que Xo y X permanecen constantes:

$$n = \frac{x-x_0}{\Delta x}; \quad n-1 = \frac{x-x_1}{\Delta x}; \quad n-2 = \frac{x-x_2}{\Delta x},$$

$$y = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} + \dots \quad (2)$$

Para evaluar el límite Taylor propone substituir:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x(h) - x(0) \cong \dot{x}_0\, h$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = y(ih+h) - y(ih) \cong \dot{y}_i \; h,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \cong y\,(h)h - y\,(0)h \cong y_0 \; h^2$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 \cong \ddot{y}\,(h)h^2 - \ddot{y}\,(0)h^2 \cong \dddot{y} \; h^3$$

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cong \frac{\dot{y}_0}{x_0}, \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} \cong \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2}, \frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} \cong \frac{\dddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^3}, \; etc.$$

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2} + \frac{(x-x_0)^3}{3!}\frac{\dddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^3} + \dots$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

DESARROLO TEÓRICO

La función p(x)=a0+a1x+a2x2+..........+anxn, en la que los coeficientes ak son constantes, se llama polinomio de grado n. En particular y=ax+b es un polinomio de primer grado e y=ax2+bx+c es un polinomio de segundo grado. Los polinomios pueden considerarse las funciones más sencillas de todas. Para calcular su valor para una x dada, necesitamos emplear únicamente las operaciones de adición, sustracción y multiplicación; ni siquiera la división es necesaria. Los polinomios son funciones continuas para todo x y tienen derivadas de cualquier orden. Además la derivada de un polinomio es también un polinomio de grado inferior en una unidad, y las derivadas de orden n+1 y superiores de un polinomio de grado n son nulas.

Si a los polinomios añadimos las funciones de la forma y=p(x)/q(x) (cociente de polinomios, para cuyo cálculo necesitamos también de la división), las funciones raíz cuadrada de x y raíz cúbica de x, y finalmente, las combinaciones aritméticas de los tipos anteriores, obtenemos esencialmente las funciones cuyos valores pueden calcularse por métodos aprendidos en el bachillerato.

A este nivel se tienen nociones de algunas otras funciones tales como log(x), sen(x), ex, ..., pero, aunque se estudian sus propiedades más importantes, no se da una respuesta a las preguntas: ¿Cómo calcularlas? ¿Qué clase de operaciones, por ejemplo, es necesario realizar sobre la x para obtener log(x) o sen(x)?. La respuesta a estas preguntas la proporcionan los métodos desarrollados por el análisis matemático. Examinemos uno de estos métodos

Fórmula de Taylor

Sea f(x) una funciónn definida en un intervalo que contiene al punto a, con derivada de todos los órdenes.

El polinomio de primer grado $p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ tiene el mismo valor que f(x) en el punto x=a y también, como se comprueba fácilmente, la misma derivada que f(x) en este punto. Su gráfica es una recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto a.

Es posible elegir un polinomio de segundo grado, $p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ½½ f''(a)(x-a)^2$, tal que en el punto x=a tenga el mismo valor que f(x) y valores también iguales para su primera y segunda derivadas. Su gráfica en el punto a se acercará a la de f(x) más que la anterior. Es natural esperar que si construimos un polinomio que en x=a tenga las mismas n primeras derivadas que f(x) en el mismo punto, este polinomio se aproximará más a f(x) en los puntos x próximos a a.

Así obtenemos la siguiente igualdad aproximada, que es la fórmula de Taylor:

$$f(x) \;.\# f(a) + f'(a)(x-a) + (1/2!) f''(a)(x-a)^2 + \ldots\ldots + (1/n!) f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

El segundo miembro de esta fórmula es un polinomio de grado n en (x-a). Para cada valor de x puede calcularse el valor de este polinomio se se conocen los valores de f(a) y de sus n primeras derivadas.

Para funciones que tienen derivada (n+1)-ésima, el segundo miembro de esta fórmula, como se demuestra fácilmente, difiere del primero en una pequeña cantidad que tiende a cero más rápidamente que $(x-a)^n$. Además , es el único polinomio de grado n que difiere de f(x), para x próximo a a, en un valor que tiende a cero (cuando x tiende a a) más rápidamente que $(x-a)^n$.
Si f(x) es un polinomio algebraico de grado n, entonces la igualdad aproximada anterior es una verdadera igualdad.

Para que sea exacta la igualdad aproximada anterior, debemos añadir al segundo miembro un término más, llamado resto:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+(1/2!) f''(a)(x-a)^2+ \ldots\ldots +(1/n!) f^{(n)}(a)(x-a)^n+(1/(n+1)!) f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

El resto tiene la peculiaridad de que la derivada que en éél aparece debe calcularse en cada caso, no en el punto a, sino en un punto c convenientemente elegido, desconocido, pero interior al intervalo de extremos a y x.

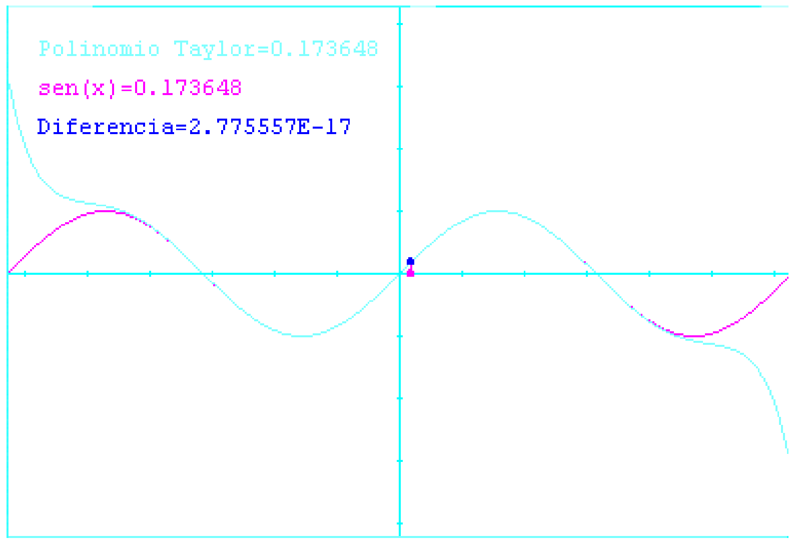
La demostración de la igualdad anterior es bastante engorrosa, aunque sencilla en esencia.

Las leyes naturales pueden expresarse, por regla general, con buena aproximación por funciones derivables un número arbitrario de veces, y por ello pueden ser aproximadas por polinomios cuyo grado viene determinado por la precesión deseada.

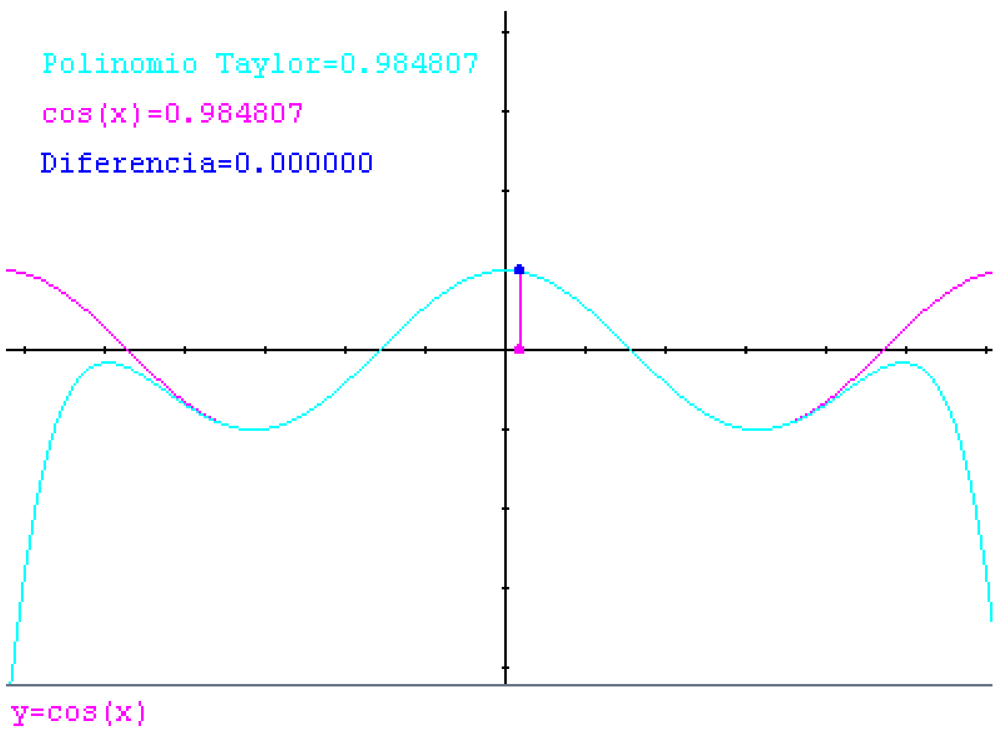
La fórmula de Taylor, que abre el camino para la mayoría de los cálculo en el análisis aplicado, es muy importante desde el punto de vista práctico.

La idea de aproximar una función mediante polinomios o de representarla como suma de un número finito de funciones más sencillas alcanzó un gran desarrollo en el análisis, donde constituye ahora una rama independiente: la teoría de la aproximación de funciones.

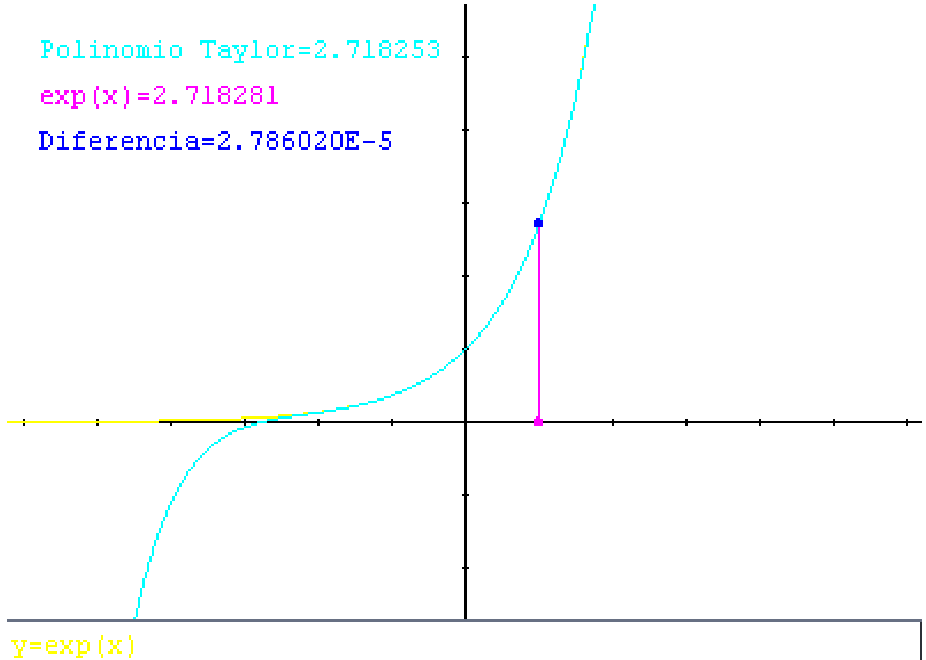
EJEMPLOS $$sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,\forall x \in R$$



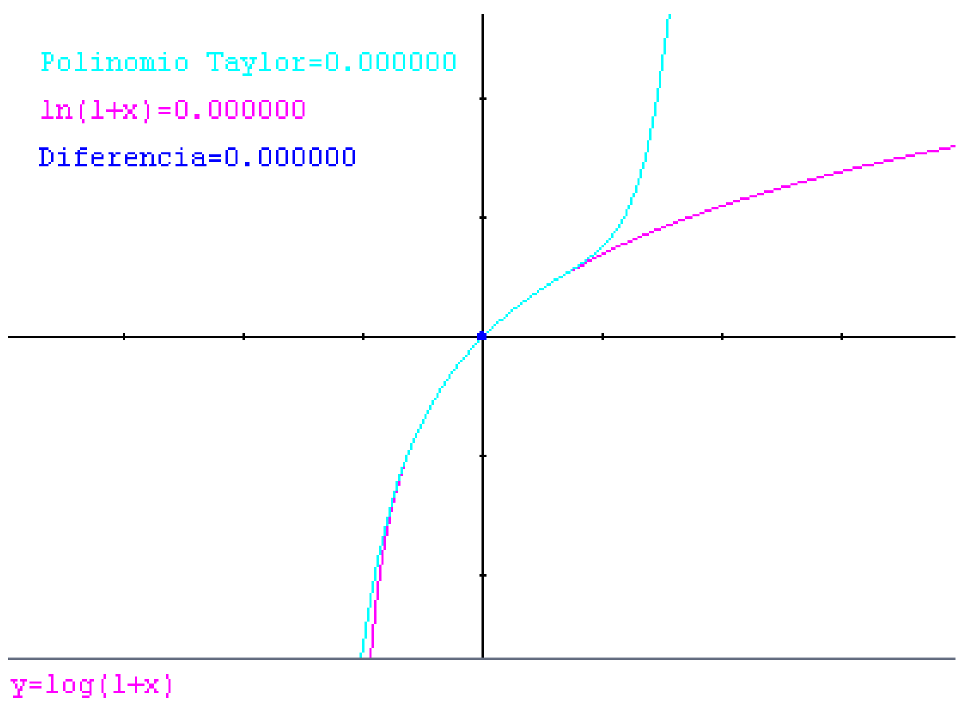
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,\forall x \in R$$



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad ,\forall x \in R$$



$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad ,-1 < x \le 1$$



PROGRAMA

```
'----------------------------------------------------------
PROGRAMA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PAGINA DE CURSO
'----------------------------------------------------------
LET A3 = 0     'Asignaci¢n de variables
LET A4 = 0
LET A2 = 0
LET A1 = 0
LET A0 = 0
LET Y0 = 0
LET X0 = 0
LET B1 = 0
LET B2 = 0
LET B3 = 0
PRINT "Programa para la tarea de series de Taylor"
PRINT " "
PRINT "El programa requiere del punto donde se hace"
PRINT "la aproximaci¢n, su valor y el n£mero de"
PRINT "derivadas (maximo hasta la tercera) que se"
PRINT "quiera aportar. Si no quiere aportar m s,"
PRINT "ingrese cero en el valor de dichas derivadas"
PRINT "-----------------------------------------"
PRINT " "
INPUT "Dame el valor de la funci¢n: ", Y1
INPUT "(En que punto? ", X0
INPUT "(Cual es el valor de la primera derivada? ", B1
INPUT "(Cual es el valor de la segunda derivada? ", B2
INPUT "(El valor de la tercera? ", B3

A1 = B3 / 6    'Valores de los coeficientes de la serie
A2 = B2 / 2 - 3 * X0 * B3 / 6
A3 = 3 * X0 * X0 * B3 / 6 - 2 * X0 * B2 / 2 + B1
A4 = X0 * X0 * B2 / 2 - X0 * X0 * X0 * B3 / 6 - X0 * B1 + Y0
```

```
PRINT "La serie de Taylor queda como:"
PRINT A1, "* x^3"
PRINT A2, "* x^2"
PRINT A3, "* x"
PRINT A4
```

CONCLUSIÓN

La serie de Taylor se resume en:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots$$

y es muy útil para reducir funciones complejas a formas polinomiales sencillas, pero como su definición dice, se necesita un número infinito de términos.

BIBLIOGRAFÍA

Análisis Numérico

Richard L. Buden; J. Douglas Faire

Numerical methods for scientists and engineers

R.W. Hamming

Metodos Numericos y Programacion Fortran

Mccraken, Daniel D

Qbasic, del menú de ayuda

Microsoft

Desarrollo en serie de Taylor

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Analisis/Desarrollo_serie_taylor/Desarrollo_en_serie_de_taylor.htm

Ricerca storica sulla serie di Taylor

Rosella Prochilo

http://web.tiscali.it/no-redirect-tiscali/corsotex/html/taylor.htm

Y sin embargo se mueve

Ruy Díaz Díaz

http://www.laprensahn.com/opinarc/9905/o22002.htm